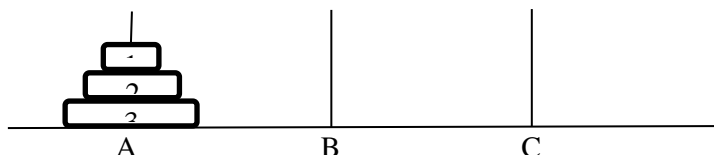
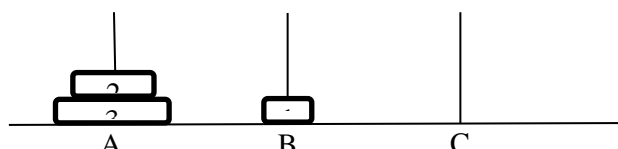


Wiązka zadań *Wieże z Hanoi*

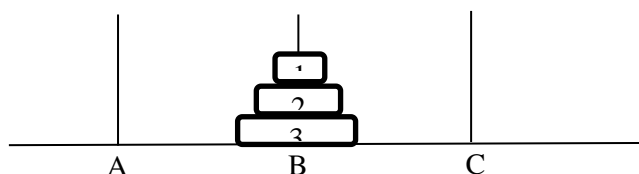
W problemie wież z Hanoi mamy trzy pręty oznaczone A, B i C oraz n okrągłych krążków o średnicach odpowiednio 1, 2, ..., n . Na początku wszystkie krążki nałożone są na pręt A, w kolejności od największego do najmniejszego (największy na dole, najmniejszy na górze). Układ ten (dla $n=3$) został przedstawiony na poniższym rysunku.



Zgodnie z regułami problemu krążki można przekładać między prętami. W jednym ruchu możliwe jest przełożenie krążka znajdującego się na szczycie jednego z prętów na szczyt innego pręta, pod warunkiem że nie kładziemy przekładanego krążka na krążek mniejszy od niego. Na przykład na poniższym rysunku krążek 2 możemy przełożyć z pręta A na pręt C, natomiast niemożliwe jest przełożenie go na pręt B.



Zadanie polega na przełożeniu wszystkich krążków z pręta A na pręt B, przy czym można korzystać z pomocniczego pręta C. Na poniższym rysunku przedstawiono efekt końcowy.



Problem wież z Hanoi można rozwiązać za pomocą algorytmu rekurencyjnego. W algorytmie pręty: startowy, docelowy i pomocniczy, podane są jako parametry wejściowe, odpowiednio x , y i z . Algorytm polega na tym, że najpierw przenosimy $n - 1$ krążków na pręt pomocniczy z , potem największy krążek zostaje przeniesiony na pręt docelowy y , a na koniec $n - 1$ krążków zostaje przeniesionych z pręta pomocniczego z na pręt docelowy y , przy czym pręt startowy x traktowany jest jako pomocniczy.

Algorytm

Specyfikacja

Dane:

- n — liczba całkowita dodatnia,
- x — nazwa pręta startowego,
- y — nazwa pręta docelowego,
- z — nazwa pręta pomocniczego.

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie x , a na końcu mają znaleźć się na pręcie y , zaś pomocniczym prętem jest z .

Uwaga: Pojedynczy ruch zapisujemy za pomocą znaku \Rightarrow . Na przykład $C \Rightarrow B$ oznacza przeniesienie krążka z pręta C na pręt B.

funkcja wieże(n, x, y, z)

jeżeli $n=1$

wypisz $x \Rightarrow y$

w przeciwnym razie

wieże($n - 1, x, z, y$)

wypisz $x \Rightarrow y$

wieże($n - 1, z, y, x$)

Przykład

Wywołanie *wieże*(2, A, B, C) spowoduje dwa wywołania rekurencyjne: *wieże*(1, A, C, B) oraz *wieże*(1, C, B, A). Ciąg ruchów utworzony przez *wieże*(2, A, B, C) ma postać:

$$A \Rightarrow C, A \Rightarrow B, C \Rightarrow B,$$

gdzie podkreślone ruchy są utworzone przez rekurencyjne wywołania *wieże*(1, A, C, B) oraz *wieże*(1, C, B, A).

9.1.

Podaj wszystkie wywołania rekurencyjne funkcji *wieże* (wraz z ich parametrami), do których dojdzie w wyniku wywołania *wieże*(3, A, B, C). Odpowiedź podaj w poniższej tabeli, uzupełniając parametry wszystkich wywołań rekurencyjnych.

n	x	y	z
3	A	B	C
2	A	C	B
1	A	B	C
1			
2			
1			
1			

9.2.

Prześledź działanie *wieże*(3, A, B, C) i uzupełnij poniżej wygenerowany ciąg ruchów:

A \Rightarrow B; A \Rightarrow C;

9.3.

Niech $H(n)$ oznacza liczbę ruchów wykonanych przez podany algorytm dla n krążków. Zauważ, że rozwiązanie problemu dla $n > 1$ krążków wymaga jednego ruchu oraz dwukrotnego rozwiązania problemu dla $n - 1$ krążków. W oparciu o tę obserwację uzupełnij poniższą tabelę.

n	$H(n)$
1	1
2	3
3	
4	
5	

7	
10	

Podaj ogólny wzór określający liczbę ruchów dla n krążków:

$H(n) = \dots\dots\dots$

9.4.

Poniżej prezentujemy nierekurencyjne rozwiązanie problemu wież z Hanoi.

Specyfikacja

Dane:

n — liczba całkowita dodatnia,

Wynik:

ciąg ruchów opisujący rozwiązanie problemu wież z Hanoi z n krążkami, w którym na początku wszystkie krążki znajdują się na pręcie A, a na końcu powinny się znaleźć na pręcie B.

Algorytm:

- (1) **dopóki** (pręt A jest niepusty lub pręt C jest niepusty) **wykonuj**
- (2) **jeżeli** n jest parzyste:
- (3) **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w lewo
- (4) **w przeciwnym razie**
- (5) **przenieś** krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo
- (6) **przenieś** krążek między prętami, na których nie ma krążka nr 1

W powyższym algorytmie przeniesienie krążka nr 1 o jedną pozycję w prawo oznacza wykonanie jednego z ruchów $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ lub $C \Rightarrow A$, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt. Analogicznie przeniesienie krążka w lewo oznacza wybranie jednego z ruchów $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$ lub $C \Rightarrow B$, tak aby krążek nr 1 został przeniesiony na inny pręt.

Ruch w kroku (6) powyższego algorytmu jest określony jednoznacznie, gdyż dopuszczalne jest tylko położenie mniejszego krążka na większym, a nie odwrotnie.

Przykład

Dla $n=3$ powyższy algorytm wykona następujący ciąg ruchów:

$A \Rightarrow B$; $A \Rightarrow C$; $B \Rightarrow C$; $A \Rightarrow B$; $C \Rightarrow A$; $C \Rightarrow B$; $A \Rightarrow B$,

gdzie ruchy podkreślone przenoszą krążek nr 1 o jedną pozycję w prawo.

Wypisz ciąg ruchów, który poda powyższy algorytm dla $n=4$.